放物型 Bergman 空間上のToeplitz 作用素(ポテンシャル論とその関連分野)

鈴木, 紀明; 西尾, 昌治; 山田, 雅博

数理解析研究所講究録
第 1553 巻 2007 年 181-195

放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素

鈴木紀明 (Noriaki Suzuki)
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)
西尾昌治 (Masaharu Nishio)
(Department of Mathematics, Osaka City University)
山田雅博 (Masahiro Yamada)
(Department of Mathematics, Gifu University)

§1. 序

元来の Bergman 空間は複素平面の単位円板上の 2 乗可積分な正則関数全体からなる Hilbert 空間である．その後，円板を滑らかな有界領域や上半平面などに一般化したり，正則関数の代わりに調和関数を対象とした調和 Bergman 空間の研究などが行われている (例えば [1], [2], [10], [12], [13] など)．我々の α-放物型 Bergman 空間は上半空間 $H := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ $(n \geq 1)$ 上の p 乗可積分な α-放物型関数全体の作る Banach 空間 b_α^p である．すなわち，$1 \leq p \leq \infty$ について，H 上の Lebesgue 測度に関する L^p 空間を $L^p(H)$ で表わすと，

$$b_\alpha^p = \{u \in L^p(H); u \text{ は } \alpha\text{-放物型}\}$$

である．ここで $0 < \alpha \leq 1$ であり，u が α-放物型とは超関数の意味で

$$L^{(\alpha)}u = 0$$

(ただし $L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta)^\alpha$) を満たす連続関数のことである (正確な定義は §2)．なお，後の議論から $b_\alpha^p \subset C^\infty(H)$ が分かる．$p = \infty$ の場合は b_α^∞ よりも，次の α-放物型 Bloch 空間 $\mathcal{B}_\alpha$ が重要となる：

(1.1) $$\mathcal{B}_\alpha := \{u \in C^1(H); u \text{ は } \alpha\text{-放物型で } \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} < \infty\},$$

ここで

(1.2) $$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} := \sup_{(x,t)\in H} \{t|\partial_t u(x,t)| + t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla u(x,t)|\}$$

である．$\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ をノルムにして Banach 空間になる．また，$b_\alpha^\infty \subsetneqq \mathcal{B}_\alpha$ である．

放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は逆 Fourier 変換

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^{2\alpha}}e^{ix\cdot\xi}\,d\xi & (t>0),\\ 0 & (t\le 0)\end{cases}\tag{1.3}$$

によって与えられる．古典的な Bergman 空間の解析では正則関数や調和関数のもつ局所劣平均の性質が随所で有効であったが，$\alpha\neq 1$ ならば $L^{(\alpha)}$ は局所的でないため α-放物型関数には局所劣平均の性質が期待できない．これを補うために，以後の解析で重要な役割を演ずるのは，基本解 $W^{(\alpha)}$ の微分を込めた評価および放物型 Bergman 空間の元 u が次の等式を満たす事実である：任意の $(x,t)\in H$ と任意の $0<s<t$ に対して

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}W^{(\alpha)}(x-y,t-s)u(y,s)dy.\tag{1.4}$$

Widder [11] に倣って (1.4) を u の Huygens の性質と呼ぶことにする[1]．これらについては §3, §4 でもう少し詳しく述べる．

放物型 Bergman 空間は $p=2$ のとき Hilbert 空間である．この再生核は

$$R_\alpha(x,t;y,s)=-2\partial_s W^{(\alpha)}(x-y,t+s)\tag{1.5}$$

で与えられる．R_α は $L^2(H)$ から $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ への直交射影であるだけでなく，$1<p<\infty$ のとき $L^p(H)$ から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ への上への有界作用素を定める．この事実から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ の双対空間は $\boldsymbol{b}^{p'}_\alpha$ と同一視できる (ただし $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$)．$p=1$ のときは有界ではない．このこともあって，$\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の双対空間は $\boldsymbol{b}^\infty_\alpha$ ではなくて，$\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ と同形になることを §5, §6 で述べる．

さて，本稿の主役である Toeplitz 作用素の定義を与えよう．μ を H 上の非負値 Borel 測度とする．$u\in\boldsymbol{b}^p_\alpha$ に対して

$$T_\mu u(x,t):=\iint_H R_\alpha(x,t;y,s)u(y,s)d\mu(y,s)\tag{1.6}$$

と定める．T_μ を μ をシンボルにもつ Toeplitz 作用素という．§7 〜 §10 において，T_μ の $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ から $\boldsymbol{b}^q_\alpha$ への有界性およびコンパクト性と Carleson 測度および vanishing Carleson 測度との関係を調べる．この問題は埋め込み

$$\boldsymbol{b}^p_\alpha\subset L^q(\mu)\tag{1.7}$$

の有界性と密接に関係している ($L^q(\mu)$ は μ に関する L^q 空間である)．

[1]Hadamard は 1903 年頃に波動方程式の初期値問題の解の研究において基本解が満たすある種の加法性を Huygens の性質と呼んだ (cf. Principe de Huygens et prolongement analytique. Bull. Soc. Math. France 52 (1924))．その後，F. Bernstein や G. Doetsch がこれと類似する熱方程式の性質 (1.4) も Huygens の性質と呼ぶようになった．

§2. α-放物型関数

$\alpha=1$ のとき $L^{(1)}=\partial_t-\Delta$ は熱作用素であり，1-放物型関数は熱方程式の解である．以下では $0<\alpha<1$ の場合の α-放物型関数の定義について簡単にまとめる．$L^{(\alpha)}$ の共役作用素 $\tilde{L}^{(\alpha)}:=-\partial_t+(-\Delta)^\alpha$ の作用は次のように表わされる：任意の $\varphi\in C_K^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して

$$\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi(x,t):=-\partial_t\varphi(x,t)-c_{n,\alpha}\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|y|>\delta}\Big(\varphi(x+y,t)-\varphi(x,t)\Big)|y|^{-n-2\alpha}\,dy.$$

ただし $c_{n,\alpha}:=4^\alpha\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma((n+2\alpha)/2)/|\Gamma(-\alpha)|$ である．φ の台 $\mathrm{supp}(\varphi)$ が $\{|x|<r,\ t_1<t<t_2\}$ に含まれるとき，$|x|\geq 2r$ ならば

$$|\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi(x,t)|\leq 2^{n+2\alpha}c_{n,\alpha}\left(\sup_{t_1<s<t_2}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y,s)|\,dy\right)\cdot|x|^{-n-2\alpha}$$

が成り立つ．さて，$\mathbb{R}^{n+1}$ の領域 D に対して

$$s(D):=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1};(y,t)\in D \text{ となる } y\in\mathbb{R}^n \text{が存在する}\}$$

とおく．一般に $\mathrm{supp}(\varphi)\subset D$ のとき $\mathrm{supp}(\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi)\subset s(D)$ である．

定義 2.1. u は以下を満たすとき D 上の α-放物型関数という：
(a) u は $s(D)$ 上の Borel 関数である．
(b) u は D 上では連続である．
(c) 任意の $\varphi\in C_K^\infty(D)$ に対して，

$$\iint_{s(D)}|u\cdot\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi|\,dxdt<\infty \quad \text{かつ} \quad \iint_{s(D)}u\cdot\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi\,dxdt=0.$$

α-放物型関数は $L^{(\alpha)}$-調和測度によって特徴付けることができる．$(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$ と $r,s>0$ に対して

$$V=V((x,t);r,s):=\{(z,\tau);|z-x|<r,\ t-s<\tau<t\}$$

とし，さらに $s'>0$ に対して $V':=\{(z,\tau);|z-x|<r,\ t-s<\tau<t+s'\}$ とおく．$\tilde{W}^{(\alpha)}(x,t):=W^{(\alpha)}(x,-t)$ とすると，$\tilde{W}^{(\alpha)}$ は $\tilde{L}^{(\alpha)}$ の基本解である．(x,t) での Dirac 測度 $\varepsilon_{(x,t)}$ の $V'^C:=\mathbb{R}^{n+1}\setminus V'$ への $\tilde{W}^{(\alpha)}$ に関する掃散測度を $\nu_{V'}^{(x,t)}$ とする．すなわち，$\nu_{V'}^{(x,t)}$ は $\mathrm{supp}(\nu_{V'}^{(x,t)})\subset V'^C$ および

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{(\alpha)}*\varepsilon_{(x,t)}&\geq\tilde{W}^{(\alpha)}*\nu_{V'}^{(x,t)} &&(\mathbb{R}^{n+1}\text{ 上で})\\ \tilde{W}^{(\alpha)}*\varepsilon_{(x,t)}&=\tilde{W}^{(\alpha)}*\nu_{V'}^{(x,t)} &&(V'^C\text{ 上で})\end{aligned}$$

を満たす正測度である．このとき $\nu_{V'}^{(x,t)}$ は $s'>0$ の取り方によらない．この共通の測度が (x,t) での V における $L^{(\alpha)}$-調和測度で，以後，これを $\nu_V^{(x,t)}$ と書く．

定理 2.2. ([4, Proposition 10]) D 上の関数 u が定義 2.1 の (a), (b) を満たしているとき，u が (c) を満たす (すなわち，u が α-放物型である) 必要十分条件は，$\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \subset s(D)$ ならば

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|(1+|x|)^{-n-2\alpha}\, dxdt < \infty \tag{2.1}$$

であって，かつ，任意の $(x,t) \in D$ と $\overline{V} \subset D$ を満たす任意の $V = V((x,t); r, s)$ に対して

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} u(z,\tau) d\nu_V^{(x,t)}(z,\tau) \tag{2.2}$$

が成り立つことである (このとき $\mathrm{supp}(\nu_V^{(x,t)}(z,\tau)) \subset s(D)$ となっていることに注意する).

定義 2.1 の条件 (c) の可積分性と (2.1) は同値であることに注意する．論文 [6] では D が帯状領域 $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ の場合も取り扱っているが本稿では以後は $D = H$ の場合のみを考える．

§3. 基本解とその評価

この節では基本解の評価をまとめておく．(1.3) で与えられる基本解は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$ 上の α-放物型関数であり，次の性質を満たす：任意の $(x,t) \in H$ と任意の $0 < s < t$ に対して

$$W^{(\alpha)}(x,t) \geq 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, t-s)dx = 1,$$

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t-s)W^{(\alpha)}(y,s)dy.$$

一般には $W^{(\alpha)}$ の初等関数を使っての具体的表示はできないが，$\alpha = 1$ のとき $W^{(1)}$ は Gauss-Weierstrass 核である：

$$W^{(1)}(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|x|^2/4t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

また，$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき $W^{(\frac{1}{2})}$ は Poisson 核と一致する：

$$W^{(\frac{1}{2})}(x,t) = \begin{cases} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \dfrac{t}{(\pi(|x|^2+t^2))^{\frac{n+1}{2}}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

$W^{(\frac{1}{2})}$ は H 上の調和関数であることから，$\frac{1}{2}$-放物型 Bergman 空間 $\boldsymbol{b}^p_{\frac{1}{2}}$ が調和 Bergman 空間と一致する．この事実は，形式的には等式

$$\tilde{L}^{(\frac{1}{2})}\cdot L^{(\frac{1}{2})}=(-\partial_t+(-\Delta)^{\frac{1}{2}})\cdot(\partial_t+(-\Delta)^{\frac{1}{2}})=-\partial_t^2-\Delta$$

から示唆されるが，正確には 4 節の 系 4.2 で与える．

放物型 Bergman 空間の解析には次の評価が基本となる：

定理 3.1. ([5, Lemma 3.1], [7, Lemma 1]) $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ を多重指数，k を非負整数とする．このとき定数 $C>0$ が存在して，任意の $(x,t)\in H$ に対して

$$|\partial_x^\beta\partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)|\le C(t+|x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-k}. \tag{3.1}$$

証明の概略を述べる．$x_0=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\psi_\alpha(t):=W^{(\alpha)}(x_0,t)$ とおく．同次性から $W^{(\alpha)}(x,t)=|x|^{-n}\psi_\alpha(|x|^{-2\alpha}t)$ と書けるので，

$$\partial_x^\beta\partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)=\partial_x^\beta(|x|^{-n-2\alpha k}\psi_\alpha^{(k)}(|x|^{-2\alpha}t))$$

である．これより ψ_α の有限回微分 $\psi_\alpha^{(k)}$ が $(0,\infty)$ で有界であることが分かれば (3.1) は示される．$W^{(\alpha)}$ は one-side stable semi-group $(\sigma_t^\alpha)_{t\ge0}$ と Gauss-Weierstrass 核 $W^{(1)}$ を使って

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\int_0^\infty W^{(1)}(x,s)d\sigma_t^\alpha(s)$$

と表されることから，[3] と同様にして

$$\psi_\alpha^{(k)}(t)=(-1)^k(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\alpha k}e^{-s|\xi|^2}\hat{\nu}(\xi)d\xi\right)d\sigma_t^\alpha(s) \tag{3.2}$$

となる ($\hat{\nu}$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球面上の一様測度の Fourier 変換)．Gauss-Weierstrass 核に対する解析を行って

$$\Psi(s):=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\alpha k}e^{-s|\xi|^2}\hat{\nu}(\xi)d\xi$$

の有界性を示し，(3.2) から $\psi_\alpha^{(k)}$ の有界性が導かれる．

§4. Huygens の性質

基本解 $W^{(\alpha)}$ が H で α-放物型であることから，Huygens の性質 (1.4) を満たす関数 u は H 上の α-放物型関数である．放物型 Bergman 空間の解析の基礎となるもうひとつの柱はこの逆が成り立つ事実である．

定理 4.1. ([5, Theorem 4.1], [6, Theorem 3.1]) H 上の α-放物型関数 u が $L^p(H)$ に属せば，u は Huygens の性質を満たす．すなわち，$u\in\boldsymbol{b}^p_\alpha$ ならば

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}W^{(\alpha)}(x-y,t-s)u(y,s)dy \tag{4.1}$$

が成り立つ.

この定理を次のようにして示した. まず $(x,t) \in H$ と $0 < s < t$ を固定して, $V_r = \{(z,\tau); |z-x| < r,\ t-s < \tau < t\}$ とする. 定理 2.2 より

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} u(z,\tau) d\nu_{V_r}^{(x,t)}(z,\tau)$$

である. $r \to \infty$ のとき $\nu_{V_r}^{(x,t)}$ が $W^{(\alpha)}(x-z,t-s)dz$ に漠収束していることは比較的容易に示すことができるが, ここではさらに

$$\lim_{r\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} u(z,\tau) d\nu_{V_r}^{(x,t)}(z,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} u(z,s) W^{(\alpha)}(x-z,t-s)dz \tag{4.2}$$

を示す必要がある. [5] では $n \geq 2$ の場合に (4.2) を示した. そこでは $W^{(\alpha)}$ が Riesz 核の半群である事実, すなわち,

$$\int_0^\infty W^{(\alpha)}(x,t)dt = c_\alpha \frac{1}{|x|^{n-2\alpha}} \qquad \left(c_\alpha := \frac{\Gamma((n-2\alpha)/2)}{4^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)}\right) \tag{4.3}$$

を使ったために, この積分が収束するための条件 $n \geq 2$ が必要となった. Riesz 核の球の外への掃散測度は具体的に知られているので, (4.3) を通して $\nu_{V_r}^{(x,t)}$ が評価できたのである. 一方, [6] では α-放物型拡大

$$\tau_r^\alpha : (x,t) \mapsto (rx, r^{2\alpha}t) \quad (r > 0)$$

を使う. $\nu_{V_r}^{(x,t)}$ の x-空間への射影を α-放物型拡大により平均化して得られる関数を評価することによって (4.2) を示した. これは $n \geq 1$ で有効である.

定理 4.1 から次の事実が分かる. まず $W^{(\alpha)}$ は C^∞ 級関数なので, $\boldsymbol{b}_\alpha^p \subset C^\infty(H)$ である. さらに, 任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 0 \quad (\forall t > 0) \tag{4.4}$$

である. この "cancelation property" は $\boldsymbol{b}_\alpha^1$ の共役空間の決定のときに使われる.

最後に次の系を記す. これから上半空間 H 上の放物型 Bergman 空間の解析が H 上の調和 Bergman 空間に対するいくつかの結果 ([2], [10], [12]) を含むことが分かる.

系 4.2. $u \in L^p(H)$ とする. このとき u が $\frac{1}{2}$-放物型関数である必要十分条件は u が通常の調和関数となることである.

§5. α-放物型 Bergman 核

Huygens の性質から, 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ と任意の $(x,t) \in H$ に対して,

$$|u(x,t)| \leq C\|u\|_{L^p(H)} t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}}.$$

が成り立つ．これより L^p ノルムでの収束列は H 上で広義一様収束していることが導かれ，$\boldsymbol{b}_\alpha^p$ は $L^p(H)$ の閉部分空間であり L^p ノルムで Banach 空間になっている．特に $p=2$ のときは $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ は Hilbert 空間であり，再生核をもつ．[5] でこの再生核は次で与えられることを示した：

$$R_\alpha(x,t;y,s) = -2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y,t+s). \tag{5.1}$$

これを α-放物型 Bergman 核とよぶ．今後の解析では次の変形再生核 R_α^m も重要となる：整数 $m=0,1,2,\cdots$ に対して

$$R_\alpha^m(x,t;y,s) := c_m s^m \partial_s^m R_\alpha(x,t;y,s), \tag{5.2}$$

ただし $c_m = (-2)^m/m!$ である．$R_\alpha^0 = R_\alpha$ は対称であるが，$m \geq 1$ のとき R_α^m は対称ではなく，(y,s) に関しては α-放物型関数ではないことに注意する．

定理 3.1 から次が分かる：$m \geq 0$ のとき，定数 $C>0$ が存在して

$$|R_\alpha^m(x,t;y,s)| \leq Cs^m(s+t)^{-m}(s+t+|x-y|^{2\alpha})^{-\frac{n}{2\alpha}-1}.$$

また，$0<p\leq\infty$ かつ $m > \left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)$ ならば

$$\left(\iint_H |R_\alpha^m(x,t;y,s)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} = Cs^{(\frac{n}{2\alpha}+1)(\frac{1}{p}-1)} \tag{5.3}$$

を満たす定数 $C>0$ が定まる．これらの評価から次の再生性が示される：

定理 5.1. ([5, Theorem 6.3]) $m \geq 0$, $p \geq 1$ とする．任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して $u = R_\alpha^m u$，すなわち

$$u(x,t) = \iint_H R_\alpha^m(x,t;y,s)u(y,s)dyds \quad (\forall(x,t)\in H)$$

が成り立つ．

以後，核 R_α^m によって定まる線形作用素も同じ記号 R_α^m と書く．次の結果は双対空間の決定に役立つ：

定理 5.2. ([5, Theorem 6.4]) (1) $1<p<\infty$ のとき，R_α は $L^p(H)$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ の上への有界作用素である．

(2) R_α は $L^1(H)$ 上では有界ではないが，$m \geq 1$ ならば，$1 \leq p < \infty$ に対して R_α^m は $L^p(H)$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ の上への有界作用素である．

§6. 双対空間

この節では α-放物型 Bergman 空間の双対空間の特徴付けを与える．

定理 6.1. ([5, Theorem 8.1]) $1 < p < \infty$ に対して p' をその共役指数とする．このとき $(\boldsymbol{b}_\alpha^p)^* \cong \boldsymbol{b}_\alpha^{p'}$ である．すなわち，$\boldsymbol{b}_\alpha^p$ の双対空間は $\boldsymbol{b}_\alpha^{p'}$ と同一視できる．

この証明を簡単に振り返る．$v \in \boldsymbol{b}_\alpha^{p'}$ に対して

$$\Lambda_v(u) := \iint_H u(x,t)v(x,t)dxdt$$

とすれば $\Lambda_v \in (\boldsymbol{b}_\alpha^p)^*$ で $\|\Lambda_v\| \le \|v\|_{L^{p'}(H)}$ である．開写像定理より $\iota(v) = \Lambda_v$ により定まる $\iota : \boldsymbol{b}_\alpha^{p'} \to (\boldsymbol{b}_\alpha^p)^*$ が全単射であることを示せばよい．

$R_\alpha(x,t;\cdot,\cdot) \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ および $v = R_\alpha v$ より

$$v(x,t) = R_\alpha v(x,t) = \iint_H R_\alpha(x,t;y,s)v(y,s)dyds = \Lambda_v(R_\alpha(x,t;\cdot,\cdot))$$

である．$\Lambda_v = 0$ から $v = 0$ が導かれ ι は単射である．

次に $\Lambda \in (\boldsymbol{b}_\alpha^p)^*$ を任意にとる．Hahn-Banach の拡張定理から $L^{p'}(H)$ の関数 f が存在して

$$\Lambda(u) = \iint_H u(x,t)f(x,t)dxdt \quad (\forall u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p)$$

となる．R_α の対称性と $R_\alpha u = u$ であること，および，定理 5.2 から $R_\alpha f \in \boldsymbol{b}_\alpha^{p'}$ なので

$$\Lambda(u) = \iint_H (R_\alpha u)(x,t)f(x,t)dxdt = \iint_H u(y,s)(R_\alpha f)(y,s)dyds = \Lambda_{R_\alpha f}(u)$$

となり，ι の全射性も示される．

定理 6.1 の結果は $p = 1$ では正しくない．$p = 1$ の双対性について述べるために (1.1) の α-放物型 Bloch 空間を再考する．正数 $C > 0$ が存在して，任意の $u \in \mathcal{B}_\alpha$ が

$$|u(x,t)| \le C(|u(0,1)| + \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha})(1 + |\log t| + \log(1 + |x|))$$

を満たすので，$\mathcal{B}_\alpha$ は $|u(0,1)| + \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ をノルムとして Banach 空間になり，さらに，各元が Huygens の性質をもつことが示される．また

$$\mathcal{B}_{\alpha,0} := \{u \in \mathcal{B}_\alpha ; \lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} \{t|\partial_t u(x,t)| + t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla u(x,t)|\} = 0\}$$

は閉部分空間になり，これを α-放物型 little Bloch 空間とよぶ．

$$\tilde{\mathcal{B}}_\alpha := \{u \in \mathcal{B}_\alpha ; u(0,1) = 0\}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0} := \{u \in \mathcal{B}_{\alpha,0} ; u(0,1) = 0\},$$

とすれば，$\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \cong \mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ および $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0} \cong \mathcal{B}_{\alpha,0}/\mathbb{R}$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ をノルムとした Banach 空間である．α-放物型 Bergman 核は $L^\infty(H)$ 上では有界にならないが

$$\tilde{R}_\alpha(x,t;y,s) := R_\alpha(x,t;y,s) - R_\alpha(0,1;y,s)$$

とすると，積分作用素 $\tilde{R}_\alpha$ は $L^\infty(H)$ から $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ への有界作用素になり，さらに，任意の $u \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ に対して

$$u = -2\tilde{R}_\alpha(t\partial_t u)$$

が成り立つ ([5, Thorem 7.9])．これらの事実と (4.4) から次が示される：

定理 6.2. ([5, Theorems 8.4, 9.3]) $\boldsymbol{b}_\alpha^1$ の双対空間は $\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ であり，$\mathcal{B}_{\alpha,0}/\mathbb{R}$ の双対空間は $\boldsymbol{b}_\alpha^1$ である．

§7. Carleson 測度

以下で取り扱う H 上の非負 Borel 測度 μ は，任意のコンパクト集合 $K \subset H$ に対して $\mu(K) < \infty$ であることを仮定する．

定義 7.1. 正数 τ に対して，非負 Borel 測度 μ が (α-放物型の意味の) τ-Carleson 測度であるとは次を満たす $C > 0$ が存在することである：任意の $(x,t) \in H$ に対して

$$\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \le Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} \tag{7.1}$$

が成り立つ．ここで $Q^{(\alpha)}(x,t)$ は (x,t) を中心とした α-放物型 Carleson box で，次で定義される：

$$Q^{(\alpha)}(x,t) := \{(y_1,\cdots,y_n,s);\ t \le s \le 2t, |y_j - x_j| \le 2^{-1}t^{\frac{1}{2\alpha}}, j = 1,\cdots,n\}.$$

以下 m は非負整数で $0 < p < \infty$ は

$$m > \left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{p}-1\right) \tag{7.2}$$

を満たすとする (これは (5.3) の積分が収束する条件である)．このとき，変形再生核 R_α^m に対するノルム不等式を用いて Carleson 測度が特徴付けられる．

定理 7.2. ([7, Proposition 1]) m と p は (7.2) を満たしているとする．$0 < q < \infty$ に対して，定数 $C > 0$ が存在して

$$\left(\iint_H |R_\alpha^m(x,t;y,s)|^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\iint_H |R_\alpha^m(x,t;y,s)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.3}$$

がすべての $(y,s) \in H$ について成り立てば μ は $\frac{q}{p}$-Carleson 測度である．

次節で $p \le q$ の場合に上の主張の逆が必要となる．より一般に次が成り立つ．

定理 7.3. ([7, Proposition 2]) m と p は (7.2) を満たし，さらに，$\frac{q}{p} > \frac{n}{n+2\alpha}$ とする．このとき，μ が $\frac{q}{p}$-Carleson 測度ならば，ある定数 $C > 0$ が存在して (7.3) がすべての $(y,s) \in H$ について成り立つ．

定理 7.2 の証明で重要になるのは，以下を満たす $C>0$ と $\rho>0$ が存在することである：任意の $(y,s)\in H$ と任意の $(x,t)\in Q^{(\alpha)}(y,\rho s)$ に対して，

$$|R_\alpha^m(x,t;y,s)|\geq Cs^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}. \tag{7.4}$$

また，定理 7.3 は Carleson box による Whitney 型の分解を H に施して，各 Carleson box 上で (7.1) を使うことによって示される．

§8. Carleson 埋め込み

H 上の非負 Borel 測度 μ の作る L^p 空間を $L^p(\mu)$ と表わす．Lebesgue 測度に関する L^p 空間はこれまで通り $L^p(H)$ と書くことにする．結果を整理するために次の関数を定義する：$\tau>0$ と μ に対して，

$$\hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}(x,t):=t^{-\tau(\frac{n}{2\alpha}+1)}\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)). \tag{8.1}$$

このとき μ が τ-Carleson 測度であることは $\hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}$ が有界関数であるといい換えることができる．

定理 8.1. ([7, Theorem 1]) $1\leq p\leq q<\infty$ とする．非負 Borel 測度 μ が $\frac{q}{p}$-Carleson 測度である必要かつ十分条件は，定数 $C>1$ が存在して，

$$\left(\iint_H |u(x,t)|^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\iint_H |u(x,t)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8.2}$$

がすべての $u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ について成り立つことである．すなわち，$\iota_\mu(u)=u$ で定まる写像 $\iota_\mu=\iota_{\mu,p,q}:\boldsymbol{b}_\alpha^p\to L^q(\mu)$ が有界になることである．

この ι_μ を Carleson 埋め込みと呼ぶが，これは必ずしも単射ではないことを注意する．なお，(8.2) の定数は μ に依らない．実際，任意の μ に対して次が成り立つ：

$$\frac{1}{C}\|\hat{\mu}_{\frac{q}{p}}^{(\alpha)}\|_\infty\leq\|\iota_{\mu,p,q}\|^q\leq C\|\hat{\mu}_{\frac{q}{p}}^{(\alpha)}\|_\infty \tag{8.3}$$

ただし

$$\|\hat{\mu}_{\frac{q}{p}}^{(\alpha)}\|_\infty:=\sup_{(x,t)\in H}\hat{\mu}_{\frac{q}{p}}^{(\alpha)}(x,t)$$

である．(8.2) は再生性 $R_\alpha^m u=u$ に注意して，Minkowski の不等式を用いることにより定理 7.2 と 7.3 から導くことができる．$p>q$ の場合はここで述べた方法ではうまく行かない．この場合の μ の特徴付けについては現在考察中である．

§9. Toeplitz 作用素の有界性

Toeplitz 作用素が α-放物型 Bergman 空間上でいつ有界になるかについて論じる．このために (8.1) と関連する次の関数を定義する．$\tau > 0$ と 非負整数 k に対して

$$(9.1) \qquad \tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}(y,s) := s^{(2-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)} \iint_H R^k_\alpha(x,t;y,s)^2 d\mu(x,t).$$

二つの関数 $\tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}$ と $\hat{\mu}^{(\alpha)}_{\tau}$ は比較可能である．

補題 9.1. ([8, Lemma 3]) k は非負整数で，$\tau > 1-(\frac{n}{2\alpha}+1)^{-1}$ かつ $k > (\frac{\tau-2}{2})(\frac{n}{2\alpha}+1)$ を満たすとき，μ が τ-Carleson 測度 (すなわち，$\hat{\mu}^{(\alpha)}_{\tau}$ が有界) である必要十分条件は $\tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}$ が有界になることである．

論文 [7] の主結果を述べるために，$\{R^m_\alpha(\cdot,\cdot;y,s);(y,s)\in H\}$ で生成される線形空間を $\mathcal{E}_m$ で表す．$m\geq 1$ かつ $1\leq p<\infty$ ならば $\mathcal{E}_m$ は $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ で稠密である．もし $p>1$ ならば $\mathcal{E}_0$ も稠密である (cf. [5, Lemma 8.2])．

定理 9.2. ([7, Theorem 2]) $1\leq p<\infty$ と $1<q\leq\infty$ が $p\leq q$ を満たすとする．非負 Borel 測度 μ に対して，ある整数 $m\geq 1$ が存在して，(Lebesgue 測度に関する) ほとんどすべての $(y,s)\in H$ に対して

$$(9.2) \qquad \iint_H |R^m_\alpha(x,t;y,s)|d\mu(x,t) < \infty$$

を仮定する．以下の [I] ～ [III] は同値である：

[I] (a) $1<q<\infty$ のとき，Toeplitz 作用素 $T_\mu : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to \boldsymbol{b}^q_\alpha$ は有界である．すなわち，定数 $C>0$ が存在して，任意の $u\in \boldsymbol{b}^p_\alpha$ に対して，ほとんどすべての $(x,t)\in H$ で

$$\iint_H |R_\alpha(x,t;y,s)u(y,s)|d\mu(y,s) < \infty$$

となり，

$$\|T_\mu u\|_{L^q(V)} \leq C\|u\|_{L^p(V)}$$

が成り立つ．

(b) $q=\infty$ のときは $T_\mu : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ が有界である．正確に言えば，定数 $C>0$ が存在して，任意の $u\in\mathcal{E}_m$ に対して

$$\|T_\mu u\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq C\|u\|_{L^p(V)};$$

が成り立ち，これから T_μ を $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ 全体に有界に拡張できる．

[II] $\tau := 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ として，μ は τ-Carleson 測度である．すなわち，$\hat{\mu}^{(\alpha)}_{\tau}$ は有界である．

[III] $k\geq 1$ のとき $\tau := 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ として $\tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}$ は有界である．

証明は，まず，[I] から [III] が $k=m$ として成り立つことを示す．条件 (9.2) はこのときのみに必要である．補題 9.1 から [II] と [III] の同値性が分かる (この議論から [III] がある $k \geq 1$ で成り立てば，任意の $k \geq 1$ で成り立つ)．最後に定理 7.3 で使った Carleson box による Whitney 型の分解の方法で [II] → [I] を示す．

なお，$m \geq \eta + \frac{n}{2\alpha} + 1$ を満たす η について

$$\iint_H (1+t+|x|^{2\alpha})^{-\eta} d\mu(x,t) < \infty$$

ならば (9.2) が成り立つ．また [III] では $p=1$ かつ $q=\infty$ の場合以外ならば $\tau < 2$ なので $k=0$ でも成り立つことを注意しておく．Carleson 埋め込みの場合と同様に $p > q$ の場合の考察は今後の課題である．

Toeplitz 作用素のコンパクト性の議論のために定理 9.2 をもう少し精密な形にする．

$$(9.3) \qquad \|T_\mu\|_{p,q} := \sup_{u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha} \frac{\|T_\mu u\|_{L^q(H)}}{\|u\|_{L^p(H)}} \quad (1 < q < \infty), \quad \|T_\mu\|_{p,\infty} := \sup_{u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha} \frac{\|T_\mu u\|_{\mathcal{B}_\alpha}}{\|u\|_{L^p(H)}}$$

としたとき，(9.2) の条件の下で次が成り立つ：

$$(9.4) \qquad \frac{1}{C_2}\|\tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}\|_\infty \leq \|T_\mu\|_{p,q} \leq C_1\|\hat{\mu}^{(\alpha)}_\tau\|_\infty \leq C_2\|\tilde{\mu}^{(\alpha)}_{\tau,k}\|_\infty$$

ここで，定数 $C_1, C_2 \geq 1$ は μ には依らない．

最後に Toeplitz 作用素 T_μ と Carleson 埋め込み $\iota_{\mu,p,q}$ の関係に触れておく．$1 \leq p < \infty$ と $1 < q \leq \infty$ が $p \leq q$ を満たすとき $\tau := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ とおく．μ が τ-Carleson 測度ならば，q' を q の共役指数としたとき，

$$\iota_{\mu,p,\tau p} : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to L^{\tau p}(\mu) \quad と \quad (\iota_{\mu,q',\tau q'})^* : L^{\tau p}(\mu) \to (\boldsymbol{b}^{q'}_\alpha)^*$$

はともに有界になり

$$T_\mu = (\iota_{\mu,q',\tau q'})^* \cdot (\iota_{\mu,p,\tau p}) : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to \boldsymbol{b}^q_\alpha \ (\cong (\boldsymbol{b}^{q'}_\alpha)^*)$$

が成り立つ．この意味は，任意の $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha$ と任意の $v \in \boldsymbol{b}^{q'}_\alpha$ に対して

$$\iint_H v(x,t) T_\mu u(x,t) dxdt = \iint_H v(x,t) u(x,t) d\mu(x,t)$$

となることである，また，$q=\infty$ のときは $\boldsymbol{b}^q_\alpha$ の代わりに $\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ とすればよい．

§10. Toeplitz 作用素のコンパクト性

線形作用素のコンパクト性と $*$-コンパクト性について簡単にまとめておく．

定義 10.1. (cf. [13]) X, Y を Banach 空間とし，T を X から Y への有界線形作用素とする．X は predual をもつ，すなわち，ある Banach 空間 Z が存在して $X = Z^*$ となっていることを仮定する．

(a) $T : X \to Y$ が弱コンパクトであるとは，X 内の列 $\{u_j\}$ が $w\text{-}\lim_{j\to\infty} u_j = 0$ を満たすとき，Tu_j が Y 内で 0 にノルム収束することである．

(b) $T : X \to Y$ が $*$-コンパクトであるとは，X 内の列 $\{u_j\}$ が $w^*\text{-}\lim_{j\to\infty} u_j = 0$ を満たすとき，Tu_j が Y 内で 0 にノルム収束することである．

(c) $T : X \to Y$ がコンパクトであるとは，X 内の有界列 $\{u_j\}$ に対して，Tu_{j_k} が Y 内でノルム収束するような部分列 $\{u_{j_k}\}$ が存在することである．

$*$-コンパクト作用素はコンパクトであり，コンパクト作用素は弱コンパクトである．逆は一般には成り立たないが，X が反射的ならば 3 つの概念は一致する．コンパクト作用素の場合と同様に $*$-コンパクト作用素の全体は作用素ノルムでの収束に関して閉じている ([8, Lemma 5]).

Toeplitz 作用素の有界性は $\hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}$ の有界性と結びついたが，コンパクト性は $\hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}$ が境界で零になる事実と結びつく．正確に述べるために次の定義を与える．

定義 10.2. 非負 Borel 測度 μ は

$$\lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} \hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}(x,t) = 0$$

を満たすとき vanishing τ-Carleson 測度という．

補題 9.1 と同じ条件の下で，μ が vanishing τ-Carleson 測度である必要十分条件は

$$\lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} \tilde{\mu}_{\tau,k}^{(\alpha)}(x,t) = 0 \tag{10.1}$$

である．

非負 Borel 測度 μ の台がコンパクトの場合は定義から直接に次が確かめられる．

補題 10.3. $1 \le p < \infty$ とする．μ の台が H でコンパクトならば次が成り立つ：

(a) $1 \le q < \infty$ のとき $T_\mu : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \boldsymbol{b}_\alpha^q$ は $*$-コンパクトである．

(b) $T_\mu : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$ は $*$-コンパクトである．

(c) $1 \le q < \infty$ のとき，埋め込み $\iota_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to L^q(\mu)$ は $*$-コンパクトである．

論文 [8] の主結果は次である．

定理 10.4. ([8, Theorem 1]) $1 \le p \le q \le \infty$ で $p \ne \infty$ かつ $q \ne 1$ のとき $\tau = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ とおく．非負 Borel 測度 μ が (9.2) を満たすと仮定する．このとき，次は同値である．

(a) Toeplitz 作用素 $T_\mu : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \boldsymbol{b}_\alpha^q$ ($q=\infty$ のときは $\boldsymbol{b}_\alpha^p \to \mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}$) は $*$-コンパクトである．

(b) μ は vanishing τ-Carleson 測度である．

(c) 任意の $k \geq 1$ に対して $\lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} \tilde{\mu}_{\tau,k}^{(\alpha)}(x,t) = 0$

上記で，$p>1$ ならば $*$-コンパクトをコンパクトにして，(c) で $k \geq 0$ として同じ主張が成り立つ．証明は H の exhaustion $\{\omega_j\}$ に対して

$$\mu_j := \mu|_{\omega_j}, \quad \nu_j := \mu - \mu_j$$

と定める．(b) を仮定すると $(\hat{\nu}_j)_\tau^{(\alpha)}$ が H 上で一様に 0 に収束していることが分かる．(9.4) を使うと

$$\|T_\mu - T_{\mu_j}\|_{p,q} = \|T_{\nu_j}\|_{p,q} \leq C_1 \|(\hat{\nu}_j)_\tau^{(\alpha)}\|_\infty \quad \to 0 \quad (j \to \infty)$$

となる．補題 10.3 より T_{μ_j} はコンパクトであるから (a) が導かれる．次に，(a) を仮定すると，T_μ は有界であるから μ は τ-Carleson 測度である．このとき，定数 $C>0$ が存在して

$$\tilde{\mu}_{\tau,m}^{(\alpha)}(y,s) \leq C \left\| T_\mu \left(\frac{R^m(\cdot,\cdot;y,s)}{\|R^m(\cdot,\cdot;y,s)\|_{L^p(H)}} \right) \right\|_{L^q(H)}$$

および

$$w^*\text{-} \lim_{(y,s)\to\partial H\cup\{\infty\}} \frac{R^m(\cdot,\cdot;y,s)}{\|R^m(\cdot,\cdot;y,s)\|_{L^p(H)}} = 0$$

が示される．T_μ の $*$-コンパクト性から $k=m$ とした (c) を得る．(b) と (c) の同値性は (10.1) である．

補題 10.3 (c) を使えば，上と同様な議論から次が分かる：

定理 10.5. ([8, Theorem 2]) $1 \leq p \leq q < \infty$ のとき $\tau = \frac{q}{p}$ とする．このとき，埋め込み $\iota_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to L^q(\mu)$ が $*$-コンパクトになる必要十分条件は μ が vanishing τ-Carleson 測度であることである．

参考文献

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer, 2001.

[2] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces, Potential Analysis, **17** (2002), 307–335.

[3] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 115 (1989), 1–22.

[4] M. Nishio and N. Suzuki, A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α, New Zealand J. Math., 29 (2000), 47–54.

[5] M. Nishio K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.

[6] M. Nishio K. Shimomura and N. Suzuki, L^p-boundedness of Bergman projections for α-parabolic operators, Advanced Studies in Pure Mathematics **44**, 305-318, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 2006.

[7] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, to appear in Hokkaido Math. J.

[8] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, preprint.

[9] M. Nishio and M. Yamada, Carleson type measures on parabolic Bergman spaces, J. Math Soc. Japan, **58** (2006), 83–96.

[10] W.C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 633–660.

[11] D.V. Widder, The heat equation, Academic Press, 1975.

[12] H. Yi, Harmonic little Bloch functions on half-spaces, Math. Japonica, (1) **47**, (1998), 21–28.

[13] K. Zhu, Hankel-Toepliz type operators on $L_a^1(\Omega)$, Integral Equations and Operator Theory, **13** (1990), 285-302.